

APPLICATION DE LA METHODE DE MONTE CARLO DANS L'ANALYSE DE LA STABILITÉ DES PENTES

Mbarka SELMI¹, Mounir LTIFI², Nizar BEL HADJ ALI²

¹ Laboratoire de Génie Civil, Tunis, Tunisie

² Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes, Tunisie

RÉSUMÉ - Cet article présente une analyse de la stabilité des pentes par une approche probabiliste se basant sur la méthode de Bishop simplifiée et utilisant la simulation de Monte Carlo. Les variables aléatoires considérées dans cette étude sont la cohésion et l'angle de frottement interne du sol. L'indice de fiabilité adopté est celui de cornel. L'approche proposée a été implémentée sous forme d'un logiciel de calcul permettant l'identification du cercle critique et fournissant simultanément, le facteur de sécurité, la probabilité de ruine et l'indice de fiabilité.

1. Introduction

Traditionnellement, l'analyse de la stabilité des ouvrages géotechniques est effectuée à la base de calculs déterministes. Dans ces approches, les incertitudes et aléas inhérents à chacun des paramètres intervenant dans le calcul ne sont pas pris en compte de manière rigoureuse; un facteur de sécurité global de l'ouvrage basé sur les valeurs moyennes des paramètres de calcul est déterminé. Ainsi, deux ouvrages ayant le même facteur de sécurité peuvent conduire à des risques de ruine très différents selon le degré de l'incertain lié aux paramètres de calcul de chacun des ouvrages étudiés.

Les avancées actuelles au niveau de la quantification des incertitudes des caractéristiques mécaniques du sol ont permis d'utiliser des approches fiabilistes, permettant une meilleure prise en compte des aléas propres aux différents paramètres aléatoires et d'aboutir ainsi à une meilleure évaluation de la sécurité des ouvrages. En effet, Phoon et Kulhawi (1999) ont présenté une synthèse des résultats de plusieurs campagnes d'essais effectués au laboratoire et in situ sur différents types de sol et ont proposé des valeurs pour les moments statistiques (i.e. moyenne et variance) des caractéristiques physiques et mécaniques du sol.

Dans la littérature, on trouve à l'heure actuelle un intérêt croissant de la communauté scientifique en géotechnique pour l'application de la théorie de la fiabilité à l'analyse de la stabilité et au dimensionnement des ouvrages. D'ailleurs, les approches semi probabilistes présentes dans les règlements de calcul récents tel que les Eurocodes témoignent de l'intérêt des ingénieurs pour ce type d'analyse. Ces règlements proposent l'utilisation de coefficients de sécurité partiels sur les différents paramètres utilisés pour mieux tenir compte des incertitudes liées à chacun de ces paramètres.

Dans l'analyse de la stabilité des pentes, Liang (Liang et al. 1998) conclue que le cercle critique d'une pente est, en fait, donné par l'indice de fiabilité qui contient plus d'informations sur les propriétés du sol entrant en jeu dans le calcul. Dans l'article présent, le modèle déterministe de calcul du facteur de sécurité d'une pente est celui de Bishop simplifié pour l'évaluation de l'indice de fiabilité vis-à-vis le glissement du massif du sol et la probabilité de ruine maximale qui lui correspond. La méthode de Monte Carlo est utilisée pour la génération des variables aléatoires indépendantes Gaussiennes de chacun des paramètres.

2. Approche déterministe

Les méthodes d'analyse déterministe de la stabilité des pentes sont basées sur le principe de la méthode des tranches. Cependant, elles diffèrent par les hypothèses supplémentaires qu'elles adoptent chacune pour la résolution du système d'équations qui est statiquement indéterminé.

2.1. Définition du facteur de sécurité

La notion du coefficient de sécurité est très importante ; à travers elle, on cherche à couvrir toutes les sources d'erreurs et à traduire par un seul nombre de quelle façon la pente est stable (Faure, 2000). La définition du coefficient de sécurité d'une pente à l'égard de la rupture est une des questions les plus controversées de la mécanique des sols. Pour évaluer la stabilité des pentes, l'ingénieur doit choisir entre plusieurs définitions du coefficient de sécurité; Ce dernier peut être un rapport des forces, des moments, de grandeur par rapport à une grandeur limite.

2.2. Surface de glissement critique

La localisation de la surface de glissement qui correspond au facteur de sécurité minimal est le but de l'analyse de la stabilité des pentes. La méthode générale consiste à déterminer le coefficient de sécurité pour un nombre suffisant de cercles en quadrillant les surfaces géométriquement compatibles avec la topographie des lieux. Les courbes d'iso valeur de facteur de sécurité permettent de déterminer le minimum (figure1).

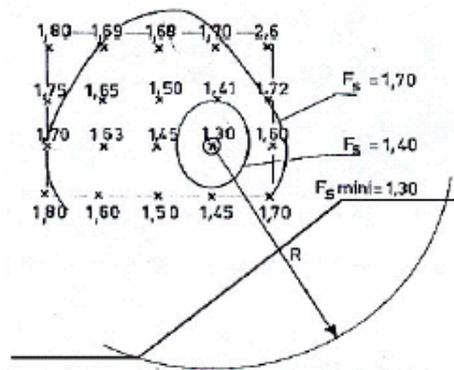


Figure 1. Courbes d'iso valeur du facteur de sécurité.

3. Approche probabiliste

L'approche probabiliste tente une prise en compte de toutes les incertitudes affectant les propriétés des sols (Magnan, 2000) et permet de conférer à la décision de l'ingénieur une plus grande objectivité (Cassan, 2000). Elle suppose que les paramètres sont des échantillons statistiques définis par une moyenne, un écart type et une loi de distribution.

3.1. Variabilité spatiale

Par nature, les sols sont des matériaux hétérogènes, leurs propriétés mécaniques et physiques présentent une variation souvent considérable d'un point à l'autre du milieu géotechnique étudié. La connaissance de la géologie du site ou du procédé de construction de l'ouvrage permet en général de définir des sous-domaines à caractéristiques à peu près homogènes.

Il peut ne s'agir toutefois que d'une homogénéité statistique dissimulant des variations spatiales souvent très significatives. Il est donc nécessaire de reconnaître que les propriétés des sols sont des fonctions aléatoires spatiales.

3.2. Variables aléatoires

Les variables aléatoires indépendantes considérées dans cette étude sont la cohésion C et l'angle de frottement interne du sol φ . Leur distribution de probabilité est supposée normale et

par suite chaque variable est caractérisée par sa moyenne μ et son coefficient de variation $COV = \mu / \sigma$.

3.3. Fonction de performance

Une analyse fiabiliste requiert la définition d'une fonction de performance ou une fonction d'état limite, $g(X)$, où X est le vecteur des variables aléatoires. La fonction de performance divise l'espace des variables aléatoires en deux domaines, un domaine de sûreté et un domaine de rupture. Ceci se traduit mathématiquement par, $g(X) > 0$ pour la région de sécurité, $g(X) < 0$ pour celle de rupture alors que la surface d'état limite est définie par $g(X) = 0$. La probabilité de ruine est donnée par :

$$P_r = Prob (g (X) < 0) \tag{1}$$

La fonction de performance est formulée comme suit :

$$g (X) = F_s - 1 \tag{2}$$

3.4. Indice de Fiabilité de Cornel

Dans l'analyse probabiliste, l'indice de fiabilité le plus couramment utilisé est celui de Cornel. Il est défini comme étant le rapport entre la moyenne de la fonction de performance et son écart type :

$$\beta_c = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \tag{3}$$

Il représente le nombre des écarts types entre la moyenne de la fonction de performance et la surface d'état limite définie par $g = 0$ (Figure 2).

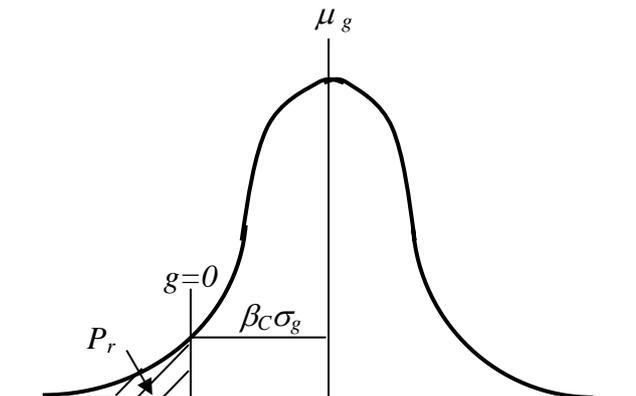


Figure 2. Indice de fiabilité et probabilité de ruine.

Le calcul de la moyenne et de l'écart type de la fonction de performance est effectué par la méthode de simulation de Monte Carlo.

3.5. Simulation de Monte Carlo

Cette méthode consiste à échantillonner par une technique de simulation appropriée les paramètres aléatoires d'entrée puis un calcul déterministe est effectué pour chaque réalisation

simulée des paramètres. On construit ainsi un échantillon de la variable de contrôle concernée, ici le facteur de sécurité, lequel est ensuite traité statistiquement afin d'obtenir les caractéristiques statistiques cherchées de cette variable.

4. Développement du programme de calcul

Basé sur les deux approches discutées ci-dessus, un modèle de calcul est implémenté sous forme d'un programme développé sous l'environnement Delphi 7.0. Ce programme permet d'évaluer la sécurité d'une pente en utilisant une approche déterministe et une approche probabiliste. La moyenne et l'écart type du facteur de sécurité, la probabilité de ruine, l'indice de fiabilité de Cornell ainsi que les caractéristiques du cercle critique (centre et rayon) constituent l'ensemble des résultats fourni par le programme en approche probabiliste. De plus, le programme est capable d'effectuer un calcul en contraintes totales (court terme) ainsi qu'un calcul en contraintes effectives (long terme). La méthode utilisée est représentée sur la figure 3.

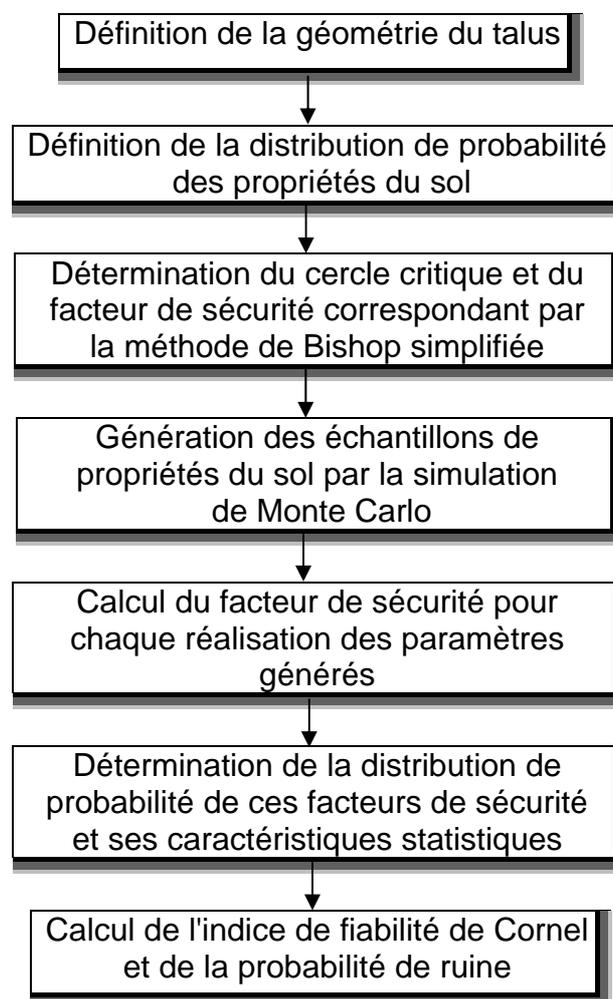


Figure 3. Représentation schématique de la méthode utilisée.

5. Application de la méthode

Plusieurs exemples des pentes homogènes ont été analysés dans le but de vérifier le modèle adopté et de s'assurer de la performance du programme. Pour cela, on considère une pente de hauteur $H = 10m$ et d'inclinaison $\beta = 60^\circ$. $C_U = 35 kPa$ indique la cohésion non drainée du sol et on désigne par $\gamma_{sat} = 18 kN/m^3$ son poids volumique saturé. Le substratum rocheux est situé à

une profondeur de 5 m (Figure 4). L'étude de la stabilité de cette pente est faite par les deux approches en contraintes totales (étude à court terme).

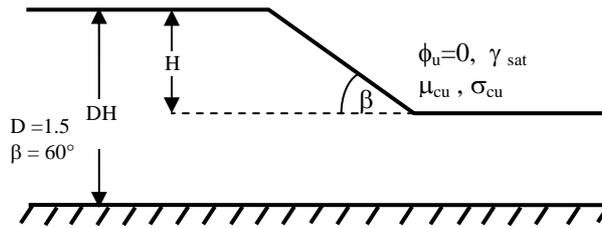


Figure 4. Schéma de la pente étudiée.

5.1. Etude déterministe préliminaire

L'analyse de la stabilité de la pente étudiée par une approche conventionnelle donne un facteur de sécurité de 1.02. Ceci signifie que la rupture ne se produit pas vu que la valeur de F_s est supérieure à 1. Les résultats obtenus par le programme de calcul sont résumés dans le tableau suivant.

Tableau I. Cercle critique par approche déterministe.

$x_0 (m)$	$y_0 (m)$	$R (m)$	Fs_{min}
2.5	10.5	15.5	1.02

On désigne par $C=c_u / (H\gamma_{sat})$ le paramètre adimensionnel de la résistance au cisaillement. La variation de la valeur de C donne les résultats de la figure 5. Cette dernière représente la relation linéaire qui lie le facteur de sécurité à C et montre que la pente devient instable pour des valeurs de C inférieures à 0.19 ($C < 0.19$).

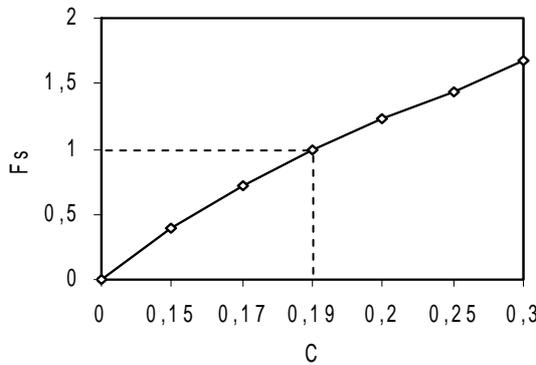


Figure 5. Relation linéaire entre F_s et C.

5.2. Etude par variable aléatoire

Cette analyse étudie l'influence de la modélisation du paramètre de résistance au cisaillement par variable aléatoire gaussienne caractérisée par une moyenne et un écart type. La probabilité de ruine, dans ce cas, est égale à la probabilité pour la quelle le paramètre de résistance au cisaillement est inférieur à 0.19. Quantitativement, elle représente la surface limitée par la fonction de la densité de probabilité et qui correspond à $C < 0.19$.

La valeur de la probabilité de ruine est donnée par :

$$\Pr = \Pr(C \leq 0.19) = \Phi\left(\frac{0.19 - \mu_C}{\sigma_C}\right) = 0.46 \tag{4}$$

L'analyse probabiliste de cette pente présente une probabilité de ruine de 42% à 48% et un indice de fiabilité de 0.01 à 0.14. Il est clair que la probabilité de ruine de cette pente est considérable. Ainsi, l'approche probabiliste est capable de prédire la rupture de la pente. Le tableau II donne la probabilité de ruine, l'indice de fiabilité et le cercle critique pour différentes valeurs du coefficient de variation de C.

Tableau II. Cercles critiques par approche fiabiliste.

C.V	x_0 (m)	y_0 (m)	R (m)	μ_F	σ_F	$P_{r\max}$	β_C
10%	2.5	10.5	15.5	1.014	0.104	0.421	0.14
20%	2.5	10.5	15.5	1.009	0.208	0.462	0.042
30%	2.5	10.5	15.5	1.003	0.313	0.480	0.01

(x_0, y_0) : coordonnées du centre du cercle critique.

R : rayon du cercle critique.

$F_{s\min}$: facteur de sécurité minimal.

$P_{r\max}$: probabilité de ruine maximale.

β_C : indice de fiabilité de Cornell.

μ_F : moyenne du facteur de sécurité.

σ_F : écart-type du facteur de sécurité.

Cette approche est répétée pour une série des valeurs de μ_C et CV et elle donne la figure 6 qui montre une relation directe entre le facteur de sécurité et la probabilité de ruine. A partir de cette figure, on note que la probabilité de ruine augmente dès que le facteur de sécurité diminue. Cependant, il est encore clair que, pour $F_s > 1$, la probabilité de ruine augmente lorsque CV augmente. Pour $F_s < 1$, la probabilité de ruine est évidemment importante, donc le CV a un effet opposé au premier, les valeurs faibles de CV engendrent des probabilités de ruine élevées (Griffiths et Gordon, 2004).

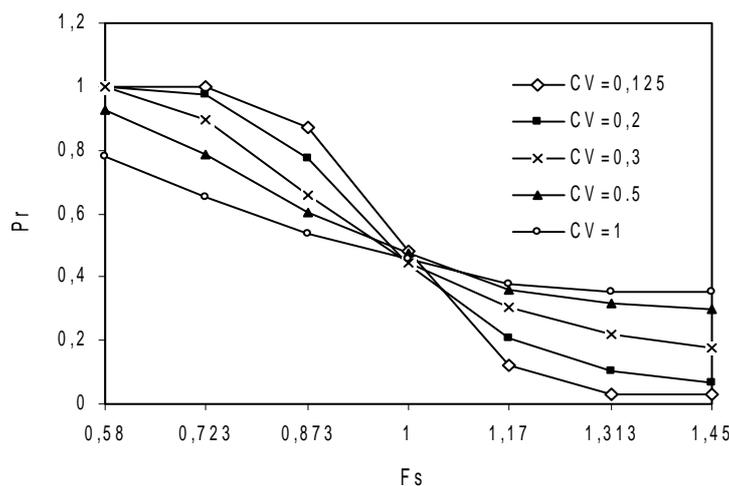


Figure 6. Variation de P_r avec F_s et CV.

5.2.1. Simulation de Monte Carlo et stabilisation de la solution

Chaque variable aléatoire est représentée par N valeurs que nous supposons indépendantes. Nous faisons l'hypothèse que la distribution de chaque paramètre s'ajuste à une loi normale. Cette loi, classique et justifiée par le théorème central limite, est appropriée dans la plupart des

cas où le coefficient de variation est inférieur à 30 % (Low, 2003). On adopte pour notre cas un coefficient de variation de 20%.

En variant la taille de l'échantillon, il est notable que les caractéristiques statistiques du facteur de sécurité, la probabilité de ruine et l'indice de fiabilité présentent des fluctuations considérables pour des échantillons de petite taille puis ils se stabilisent à partir d'une population égale à 1000 (figure7) (Low, 2003 ; Ltifi et al., 2005). Ceci est du à la méthode elle-même qui donne des résultats satisfaisants pour des échantillons importants.

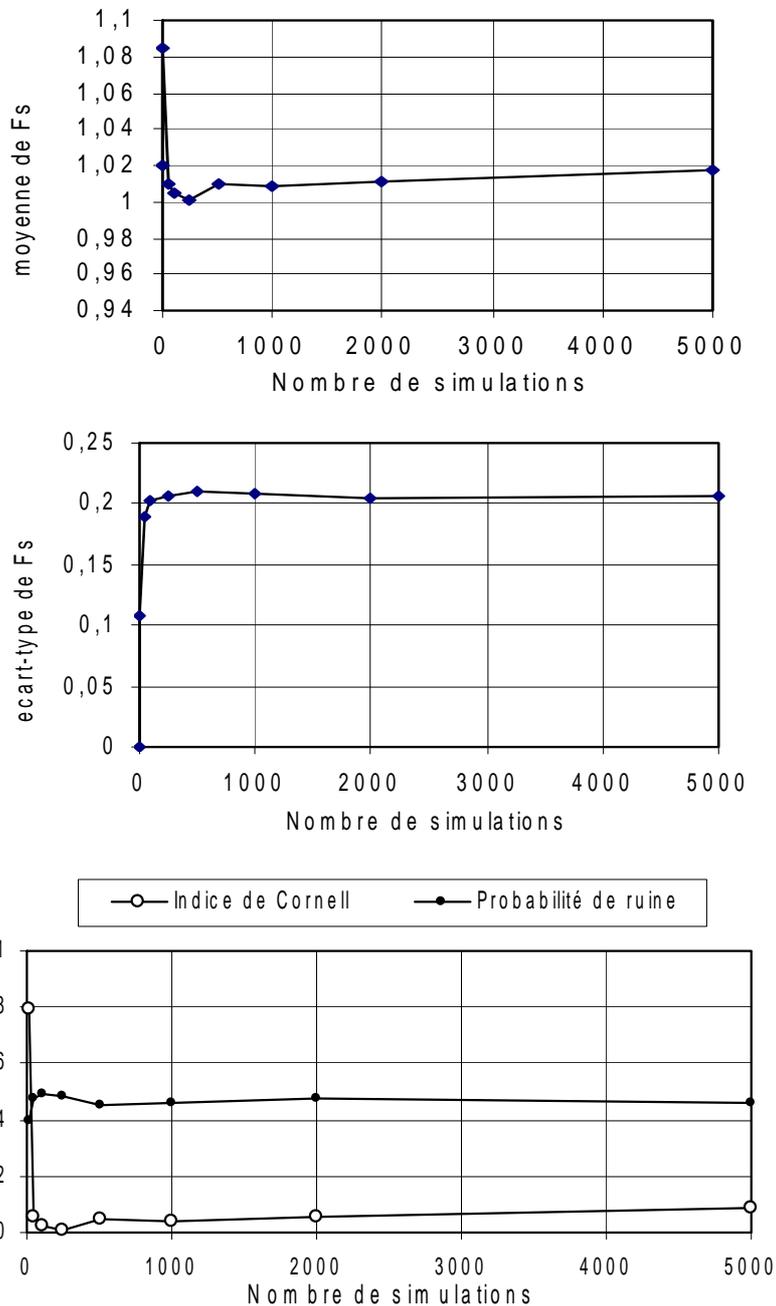


Figure 7. Influence du nombre des simulations sur la probabilité de ruine et l'indice de fiabilité.

6. Conclusion

L'étude de cette pente met en évidence l'insuffisance de l'approche déterministe dans la prédiction de la rupture ainsi il permet d'illustrer l'importance d'une analyse probabiliste dans la

vérification de la stabilité. Une telle approche tient compte de la variabilité spatiale des propriétés des sols. Par conséquent, toutes les informations des tests géotechniques sont implicitement utilisées. Donc, l'indice de fiabilité résultant contient plus d'informations que le facteur de sécurité. Ceci aide l'ingénieur à identifier le cercle de rupture critique le plus probable et non celui ayant le facteur de sécurité minimal. Cependant, et comme tout paramètre de la géotechnique, la probabilité de ruine et l'indice de fiabilité ne valent que par la qualité de leurs données et ne constituent pas un substitut du facteur de sécurité mais ils représentent un complément de calcul qui aide l'ingénieur dans la prise de la décision.

7. Références bibliographiques

- Cassan M. (2000) Utilisation de la statistiques descriptive en géotechnique. *Revue française de géotechnique N° 93*.
- Faure R.M. (2000) L'évolution des méthodes de calcul en stabilité de pentes : méthodes à la rupture. *Revue française de géotechnique N° 92*.
- Griffiths, D.V., Gordon, A.F. (2004) Probabilistic Slope Stability Analysis by Finite Elements. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol.130, 507-518*.
- Liang R.Y., Nusier O.K., Malkawi A.H. (1998) A reliability based approach for evaluating the slope stability of embankment dams.
- Low B.K. (2003) Practical Probabilistic Slope Stability Analysis.
- Ltifi M., Bel Hadj Ali N., Selmi M. (2005) Analyse Probabiliste de la Stabilité des Pentes par la méthode de Monte Carlo. Séminaire international sur les risques naturels liés au glissement des terrains RNGTER05 à Guelma, Algérie.
- Magnan J.P. (2000) Quelques spécificités du problème des incertitudes en géotechnique. *Revue française de géotechnique N° 93*.
- Phoon, K.K., Kulhawi, F.H. (1999) Characterisation of geotechnical variability. *Can.Geotech. J., Vol.36, p.612-624*.
- Selmi M. (2005) *Etude fiabiliste de la stabilité des pentes. Mémoire de mastère à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT)*.